Exercice 1 : Intégrales de Wallis avec correction

On considère la suite $(I_n)_n$ définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)^n dt$$

PARTIE 1 - CALCUL DES PREMIERS TERMES

— **1. Calculer I_0 et I_1.**

$I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1dt = \pi/2.$
$I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} cos(t)dt = sin(\pi/2) - sin(0) = 1.$

— **2. Soit n un entier naturel, $n > 1$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :**

$$f(x) = sin(x)cos(x)^n$$

Montrer que

$$f'(x) = (n+1)cos(x)^{n+1} - ncos(x)^{n-1}.$$

f est dérivable et $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= cos(x)cos^n(x) + sin(x)(-nsin(x))cos^{n-1}(x) \\ &= cos^{n+1}(x) - nsin^2(x)cos^{n-1}(x) \text{ et } sin^2 + cos^2 = 1 \\ &= cos^{n+1}(x) - n(1 - cos^2(x))cos^{n-1}(x) \\ &= (n+1)cos^{n+1}(x) - ncos^{n-1}(x). \end{aligned}$$

— **3. En déduire que pour tout entier naturel $n > 1$, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$.**

On sait que

$$f(x) = \int_0^x f'(t)dt$$

Donc on en déduit :

$$sin(x)cos^n(x) = (n+1)\int_0^x cos^{n+1}(t)dt - n\int_0^x cos^n(t)dt$$

On évalue en $x = \frac{\pi}{2}$:

$$0 = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1}(t)dt - n\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt$$

i.e

$$0 = (n+1)I_{n+1} - nI_n \iff I_{n+1} = \frac{n+1}{n} I_n$$

C'est vrai pour tout entier naturel $n \geq 1$ donc si $n \geq 2$, $n-1 \geq 1$ et

$$I_{(n-1)+1} = \frac{(n-1)+1}{n-1} I_{(n-1)-1} \iff I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

— **3.bis) Avec intégration par partie :**

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(t)cos^{n-1}(t)dt \\
&= [sin(t)cos^{n-1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\pi/2} sin(t)(-(n-1)sin(t)cos^{n-2}(t)dt. \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} sin^2(t)cos^{n-2}(t)dt \text{ et } sin^2 + cos^1 = 1. \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} (1-cos^2(t))cos^{n-2}(t)dt \\
&= (n-1)\int_0^{\pi/2} cos^{n-2}(t)dt - (n-1)\int_0^{\pi/2} cos^n(t)dt
\end{aligned}$$

D'où $I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

$\iff nI_n = (n-1)I_{n-2} \iff I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$

PARTIE 2 - ÉTUDE DE LA CONVERGENCE

— **1. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est décroissante.**
On a fait par récurrence avec des histoires de $2n$ et $2n+1$. En fait ça marche pas très bien.
On va le faire d'une façon beaucoup plus simple :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1}(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)dt. \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{n+1}(t) - cos^n(t)dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n(t)(cos(t)-1)dt
\end{aligned}$$

Or cos est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc cos^n aussi et $cos \leq 1$ donc

$$cos^n(t)(cos(t)-1) \leq 0, \forall t \in [0; \frac{\pi}{2}]$$

Donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$.

— **2. Montrer que la suite $(I_n)_n$ est convergente.**
cos est positive sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ donc $I_n \geq 0$ et I_n est décroissante donc converge.

— **3. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$.**
Initialisation : $1 \cdot I_0I_1 = 1 \cdot \dfrac{\pi}{2}$ OK
Hérédité : On suppose que $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
(n+2)I_{n+2}I_{n+1} &= (n+2)\frac{n+1}{n+2}I_nI_{n+1} \text{ par la relation de la Partie 1-Q.3).} \\
&= (n+1)I_{n+1}I_n \\
&= \frac{\pi}{2} \text{ par hypothèse de récurrence.}
\end{aligned}$$

— **4. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.**
La suite $(I_n)_n$ est convergente donc elle admet une limite que l'on note $\ell \in \mathbb{R}$.
Donc la suite $(I_{n+1})_n$ admet la même limite ℓ.
Or $I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2(n+1)}$ par ce qui précède (Q.3).
En passant à la limite : $\ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.

PARTIE 3 - NOTION D'ÉQUIVALENCE

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites à valeurs réelles qui ne s'annulent pas.
On dit que $(u_n)_n$ est équivalent à $(v_n)_n$ et on note $u_n \sim v_n$ si :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

— **1. Montrer que $u_n \sim u_n$. La relation $\sim$ est alors dite "réflexive".**
$\dfrac{u_n}{u_n} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ d'où $u_n \sim u_n$.

— **2. Montrer que si $u_n \sim v_n$ alors $v_n \sim u_n$. La relation $\sim$ est alors dite "symétrique".**

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{\frac{u_n}{v_n}}$$

Or $\dfrac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $\dfrac{1}{\frac{u_n}{v_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$
Donc $\dfrac{v_n}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Donc $v_n \sim u_n$.

— **3. Soit $(w_n)_n$ une suite à valeur réelle qui ne s'annule pas.**
Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$ alors $u_n \sim w_n$. La relation $\sim$ est dite "transitive".

$$\begin{aligned} \frac{u_n}{w_n} &= \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{v_n}{w_n} \text{ or } u_n \sim v_n \text{ et } v_n \sim w_n \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

— **4. Montrer que si $u_n \sim v_n$ et $x_n \sim y_n$ alors $u_n x_n \sim w_n y_n$.**

$$\frac{u_n x_n}{v_n y_n} = \frac{u_n}{v_n} \cdot \frac{x_n}{y_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1$$

Remarque : Si deux suites sont équivalentes, elles ont le même comportement à l'infini. Si l'une des deux suites admet des propriétés à l'infini, l'autre aussi. Cela permet de se ramener à des suites plus simples.
Exemple : $log(1+\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ ou encore $(1+\frac{1}{n})^p - 1 \sim p\frac{1}{n}$ quand $n \to +\infty$.

PARTIE 4 - ÉQUIVALENT DE LA SUITE $(I_n)_n$.

— **1. Soit $n > 2$. Montrer que $I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$.**

On utilise simplement la croissance de la suite $(I_n)_n$.

— **2. Pourquoi la suite $(I_n)_n$ ne s'annule pas ? Montrer $I_n \sim I_{n-1}$.**
I_n ne s'annule pas car s'il existe n tel que $I_n = 0$ alors par la relation $(n+1)I_nI_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ on aurait $\frac{\pi}{2} = 0$ ce qui n'est pas le cas.
On a pour $n > 2$:

$$I_n \leq I_{n-1} \leq I_{n-2}$$

Par la relation de récurrence de la partie 1, Q.3) :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \iff I_{n-2} = \frac{n}{n-1} I_n$$

On injecte dans l'inégalité :

$$I_n \leq I_{n-1} \leq \frac{n}{n-1} I_n$$

On sait que $I_n \neq 0$ par la question 2. donc :

$$1 \leq \frac{I_{n-1}}{I_n} \leq \frac{n}{n-1}$$

Or on a $\dfrac{n}{n-1} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
Donc par théorème des gendarmes

$$\frac{I_{n-1}}{I_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \text{ d'où } I_n \sim I_{n-1}$$

— **3. Montrer que $I_nI_{n-1} \sim \frac{\pi}{2n}$.**
$I_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ d'après la Partie 2 Q.3) donc $\dfrac{I_nI_{n-1}}{\frac{\pi}{2n}} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$
Donc $I_nI_{n-1} \sim \frac{\pi}{2n}$.

— **4. En déduire $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.**
D'après la Partie 3, Q.4), comme $I_{n-1} \sim I_n$ alors $I_{n-1}I_n \sim I_nI_n = (I_n)^2$ (où $u_n = I_{n-1}$, $v_n = I_n$, $x_n = I_n$ et $y_n = I_n$).
Or d'après la Partie 4, Q.3), $I_nI_{n-1} \sim \frac{\pi}{2n}$.
Donc d'après la Partie 3, Q.3), $(I_n)^2 \sim \frac{\pi}{2n}$.
Reste à voir ce qu'il se passe si on passe à la racine carrée.
Or $((I_n)^2)_n$ est une suite strictement positive car $I_n \neq 0$.

Or $u_n = \frac{\pi}{2n}$ est aussi strictement positive.
Donc $\dfrac{(I_n)^2}{u_n} > 0$ donc $\sqrt{\dfrac{(I_n)^2}{u_n}}$ est définie.
Par continuité de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$:

$$\sqrt{\frac{(I_n)^2}{u_n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\lim_{n\to+\infty} \frac{(I_n)^2}{u_n}} = \sqrt{1} = 1$$

Or

$$\sqrt{\frac{(I_n)^2}{u_n}} = \frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \text{ car } I_n > 0$$

Donc

$$\frac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

D'où

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Exercice 2 : Formulaire trigonométrique

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
On rappelle que $e^{i\theta}$ s'écrit sous forme trigonométrique $e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$.
On rappelle aussi que si $z \in \mathbb{C}$ alors $|z| = \sqrt{\mathcal{R}e(z)^2 + \mathcal{I}m(z)^2}$.

— 1. Montrer que $sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$.

— 2. Montrer que $cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$.

— 3. Montrer que $sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

— 4. On prend $x, y \in \mathbb{R}$, montrer en utilisant Q.2) et Q.3) que

$$cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sin(x)sin(y)$$

— 5. En déduire $cos(x - y)$.

On prend $x, y \in \mathbb{R}$, on admet la formule pour sin (même calcul que pour cos) :

$$sin(x + y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y)$$

$$sin(x - y) = sin(x)cos(y) - cos(x)sin(y)$$

— 6. Montrer que $cos(2\theta) = 2cos(\theta)^2 - 1$.

Avec l'exact même raisonnement, on a $sin(2\theta) = 2cos(\theta)sin(\theta)$.

— 7. Vérifier l'égalité

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

Et en déduire $cos(\frac{\pi}{12})$ et $sin(\frac{\pi}{12})$ à l'aide de Q.5.

— 8. Calculer $cos(\frac{\pi}{8})$ à l'aide de la Q6).

Indication : on connaît $cos(\dfrac{\pi}{4})$.

Exercice 3 : Maximum

Déterminer le maximum de la fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe

$$f(x) = cos(x)^2 - cos(x)$$

Exercice 4 : Somme

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

— 1. Soit $0 < q < 1$ et $n \in \mathbb{N}$. Donner $1 + q + q^2 + \ldots + q^n$.

— 2. Pour tout $0 \leq k \leq n$, en vous aidant de la question 2. de l'exercice 2, que vaut $cos(k\theta)$?

— 3. Si $\theta = 0$, calculer $S = 1 + cos(\theta) + cos(2\theta) + \ldots + cos(n\theta)$.

— 4. On suppose dans la suite $\theta \neq 0$. Montrer

$$S = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta} + (e^{i\theta})^2 + \ldots + (e^{i\theta})^n) + \frac{1}{2}(1 + e^{-i\theta} + (e^{-i\theta})^2 + \ldots + (-e^{i\theta})^n)$$

— 5. En déduire

$$S = \frac{1}{2}(\frac{1 - e^{(n+1)i\theta}}{1 - e^{i\theta}} + \frac{1 - e^{-(n+1)i\theta}}{1 - e^{-i\theta}})$$

— 6. Montrer $e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta/2} \cdot 2sin(\frac{\theta}{2})$.

On admet de même :

$$e^{-i\theta} - 1 = e^{-i\frac{\theta}{2}} \cdot 2sin(\frac{\theta}{2})$$

$$e^{(n+1)\cdot i\theta} - 1 = e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}} \cdot 2sin(\frac{(n+1)\theta}{2})$$

$$e^{-(n+1)\cdot i\theta} - 1 = e^{-i\frac{(n+1)\theta}{2}} \cdot 2sin(\frac{(n+1)\theta}{2})$$

— 7. En déduire

$$S = cos(\frac{n\theta}{2})\frac{sin(\frac{(n+1)\theta}{2})}{sin(\frac{\theta}{2})}$$